Table des matières

9 Vecteurs, droites et plans de l'espace **1**

Exercices supplémentaires du chapitre . . . 1

ES 1 (Théorème du toit) (Corrigé) . . . 1

ES 2 (Droite parallèle à un plan dans un cube) (Corrigé) . . . 1

ES 3 (Coordonnées dans un tétraèdre) (Corrigé) . . . 1

ES 4 (Colinéarité et coplanarité de vecteurs) (Corrigé) . . . 2

ES 5 (Alignement et coordonnées dans une pyramide) (Corrigé) . . . 2

ES 6 (Étude d'une configuration) (Corrigé) . . . 3

ES 7 (Droite et plan dans un tétraèdre) (Corrigé) . . . 4

ES 8 (Plans dans une pyramide) (Corrigé) . . . 4

ES 9 (Section d'une pyramide par un plan) (Corrigé) . . . 4

ES 10 (Vrai ou faux dans un cube) (Corrigé) . . . 4

ES 11 (Section d'un pavé droit par un plan) (Corrigé) . . . 5

ES 12 (Section d'un cube par un plan) (Corrigé) . . . 5

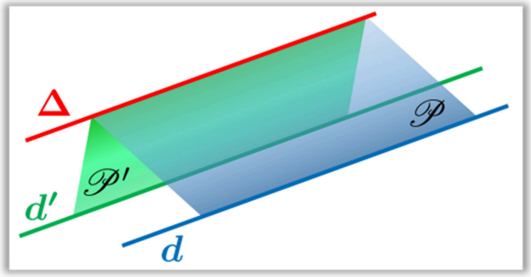
Chapitre 9

Vecteurs, droites et plans de l'espace

Exercices supplémentaires du chapitre

En cliquant sur le lien « Corrigé », vous pouvez consulter la correction détaillée de chaque exercice.

ES 1 (Théorème du toit) (Corrigé)



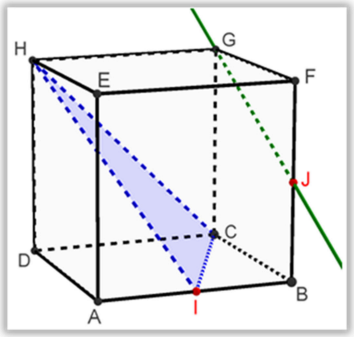
Le but de cet exercice est de démontrer le théorème du toit dont on rappelle l'énoncé :

> *Soient deux plans sécants $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.*
> *Si une droite d de $\mathscr{P}$ est parallèle à une droite d' de $\mathscr{P}'$, alors la droite d'intersection Δ de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ est parallèle à d et à d'.*

Soient $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ et $\vec{v}$ un vecteur directeur de d.

1. Déterminer un vecteur directeur de d'.
2. ***On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires***. Montrer alors que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.
3. Conclure.

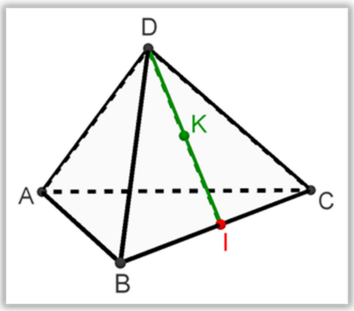
ES 2 (Droite parallèle à un plan dans un cube) (Corrigé)



$ABCDEFGH$ est un cube. I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BF]$.

1. Démontrer que la droite (GJ) est parallèle au plan (HIC) à l'aide d'une décomposition.
2. Refaire la question **1** à l'aide d'un repère judicieusement choisi.

ES 3 (Coordonnées dans un tétraèdre) (Corrigé)



$ABCD$ est le tétraèdre représenté ci-contre.

On note I le milieu de l'arête $[BC]$ et K le milieu du segment $[ID]$.

On se place dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\,,\overrightarrow{AD}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID}$.
2. Démontrer que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ puis en déduire les coordonnées du point K.

ES 4 (Colinéarité et coplanarité de vecteurs) (Corrigé)

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère les vecteurs : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-6\\3\end{pmatrix}$.

1. Le vecteur $\vec{u}$ est-il colinéaire au vecteur $5\,\vec{v}-\vec{w}$?

2. Le vecteur $\vec{w}$ est-il colinéaire au vecteur $\vec{v}-\vec{u}$?

3. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$?

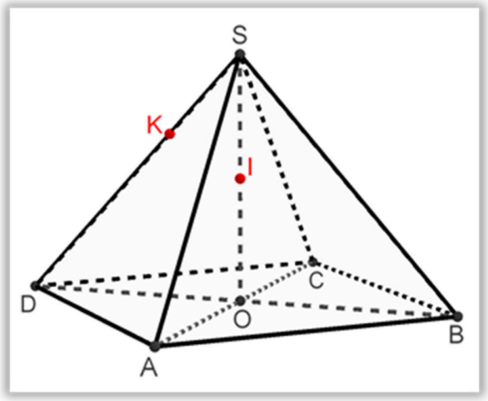
4. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{t}$ non colinéaire à $\vec{u}$, à $\vec{v}$ et à $\vec{w}$, et coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{w}$.

5. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{h}$ de cote nulle et coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

6. Démontrer que les plans $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$ et $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ sont sécants selon l'axe des abscisses $(O\,;\,\vec{\imath})$.

ES 5 (Alignement et coordonnées dans une pyramide) (Corrigé)

Une pyramide régulière $SABCD$ de sommet S constituée de la base carrée $ABCD$ et de triangles équilatéraux est représentée ci-contre.



Le point O est le centre de la base $ABCD$.

On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment $[SO]$.

1. **a)** Justifier que les points I et K appartiennent au plan (SBD).

b) Justifier que $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SD}$ sont deux vecteurs directeurs du plan (SBD).

c) Décomposer $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BK}$ dans la base $\left(\overrightarrow{SB}\,;\,\overrightarrow{SD}\right)$ du plan (SBD).

d) En déduire que les points B, I et K sont alignés.

2. Dans cette question, on se place dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{OB}\,,\,\overrightarrow{OC}\,,\,\overrightarrow{OS}\right)$.

Les questions **a)** *et* **b)** *suivantes consistent à démontrer que les points B, I et K sont alignés, d'une autre façon que celle utilisée au* **1**.

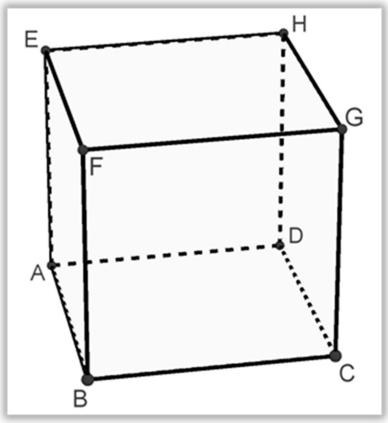
a) Déterminer les coordonnées du point K.

b) En déduire que les points B, I et K sont alignés.

c) On note L le point d'intersection de l'arête $[SA]$ avec le plan (BCI). Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles. (*On pourra utiliser le théorème du toit démontré à l'*ES 1)

d) Déterminer les coordonnées du point L.

ES 6 (Étude d'une configuration) (Corrigé)



$ABCDEFGH$ est le cube représenté ci-contre.

On se place dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

Partie A – Centre du cube

1. Justifier que les droites (AG) et (EC) sont sécantes et calculer les coordonnées de leur point d'intersection O.

2. Justifier que les droites (BH) et (DF) sont sécantes et calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

3. Que peut-on dire des quatre droites (AG), (EC), (BH) et (DF) ?

Partie B – Point d'intersection d'un plan avec une arête

1. Construire les points I, J et K définis par : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{AK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$.

2. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

3. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de chacune des droites (IJ) et (IK).

Soit L un point de l'arête $[CD]$.

4. Justifier que les coordonnées de L sont de la forme $(a\,;\,1\,;\,0)$, où a est un réel de l'intervalle $[\,0\,;\,1\,]$.

5. Pour quelle valeur de a le point L appartient-il au plan (IJK) ?

Partie C – Études de positions relatives

Dans cette partie, on prend $a=\frac{1}{4}$ *et le point* L *a donc pour coordonnées* $\left(\frac{1}{4}\,;\,1\,;\,0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère $IKJL$ est un parallélogramme.

2. Calculer les coordonnées du centre du parallélogramme $IKJL$. Quel point reconnaît-on ?

3. Quelle est la position relative des droites (IJ) et (BH) ?

4. Compléter le texte suivant afin d'obtenir une preuve que le point B n'appartient pas au plan (IJK).

Supposons que B *appartienne au plan* (IJK).

- *Comme la droite* (BI) *passe par* ....., *on a :* ..... $\in(BI)$.....(IJK) *et donc* ..... $\in(IJK)$.
- *Comme la droite* (CL) *passe par* ....., *on a :* ..... $\in(CL)$.....(IJK) *et donc* ..... $\in(IJK)$.
- *Le plan* (IJK) *contenant les 3 points* ....., *il est donc confondu avec le plan* .....
- *Or, le point* K *appartient à la fois au plan* ..... *et au plan* .....

Ces deux plans étant ....., *on aboutit à une contradiction.*

Par conséquent, on peut conclure que .....

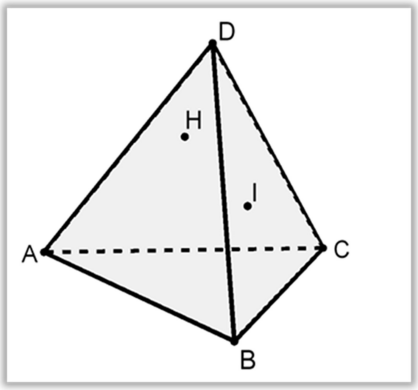
5. En déduire la position relative de la droite (BH) et du plan (IJK).

6. Déterminer les coordonnées du point M de la droite (HG) tel que les droites (MF) et (IL) soient parallèles.

7. Justifier que la droite (MF) est parallèle au plan (IJK).

Remarque.
Les 6 exercices suivants ne portent pas sur les vecteurs, les repères et les coordonnées.
Ils utilisent les axiomes et les propriétés ***A*** *à* ***J*** *vues en début de chapitre (cf section* **Introduction** *du cours).*
*Le théorème du toit, démontré à l'*ES 1*, pourra aussi être utile.*

ES 7 (Droite et plan dans un tétraèdre) (Corrigé)

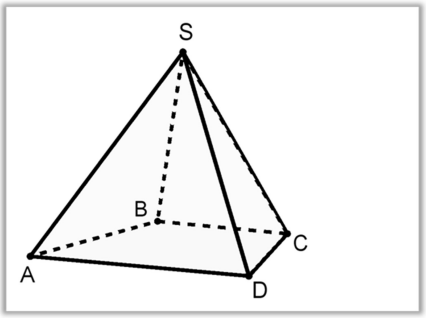


$ABCD$ est un tétraèdre.

H est un point de la face (BAD) et I est un point de la face (BCD).

Tracer l'intersection de la droite (HI) avec le plan (ABC).

ES 8 (Plans dans une pyramide) (Corrigé)

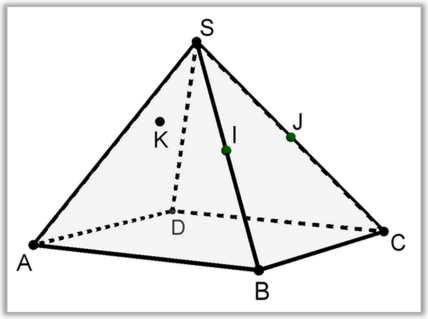


$SABCD$ est une pyramide telle que les droites (AD) et (BC) sont parallèles et les droites (AB) et (CD) sont sécantes.

1. Construire, en justifiant, l'intersection des plans (SBC) et (SAD).

2. Construire, en justifiant, l'intersection des plans (SAB) et (SCD).

ES 9 (Section d'une pyramide par un plan) (Corrigé)



$SABCD$ est une pyramide à base carrée.

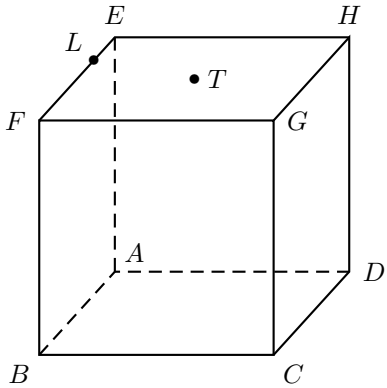
I et J sont les milieux respectifs de $[BS]$ et $[CS]$.

K est un point de la face ADS.

Construire, en justifiant, la section de la pyramide par le plan (IJK).

ES 10 (Vrai ou faux dans un cube) (Corrigé)

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.



$ABCDEFGH$ est un cube de côté 1. L est le point de $[EF]$ tel que $EL = \frac{1}{3}EF$.
On note T le centre de la face $EFGH$.

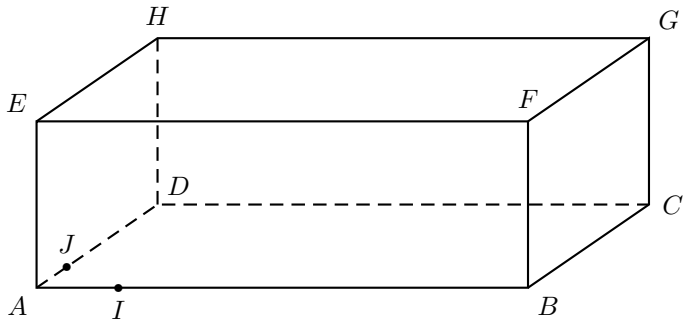
Proposition 1 : *La section du cube par le plan (BDL) est un triangle.*

Proposition 2 : *Les droites (BT) et (FD) sont coplanaires.*

Proposition 3 : *Les droites (LT) et (BC) ne sont pas coplanaires.*

ES 11 (Section d'un pavé droit par un plan) (Corrigé)

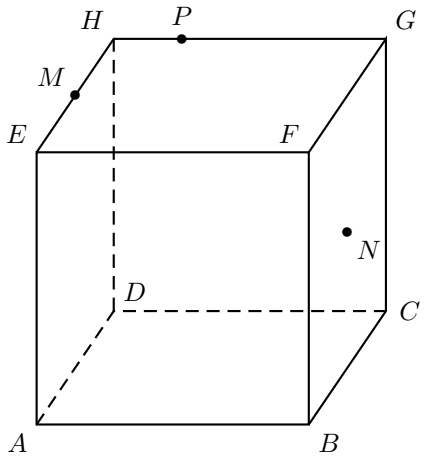
$ABCDEFGH$ est un pavé droit. Construire la section du pavé par le plan (IJG).



ES 12 (Section d'un cube par un plan) (Corrigé)

$ABCDEFGH$ est un cube.

M est le milieu du segment $[EH]$, N celui du segment $[FC]$ et P est le point du segment $[HG]$ tel que $HP = \frac{1}{4}HG$.



1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L. Construire L.

2. Déterminer, en justifiant, l'intersection des plans (MNP) et (BCG).

3. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note R leur point d'intersection.
On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note S leur point d'intersection.
Construire, en justifiant, l'intersection Δ des plans (MNP) et (ABF).

4. En déduire la section du cube par le plan (MNP).

5. On admet que Δ et (AB) sont sécantes en un point I. Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABC).