

Table des matières

4	Limites de fonctions	1
	Exercices supplémentaires du chapitre	1
	ES 1 (Asymptote oblique) (Corrigé)	1
	ES 2 (Polynôme de degré 3 et seuils) (Corrigé)	1
	ES 3 (Scripts en Python) (Corrigé)	2
	ES 4 (Vrai ou faux?) (Corrigé)	2
	ES 5 (Réglage d’une perfusion) (Corrigé)	3

Chapitre 4

Limites de fonctions

Exercices supplémentaires du chapitre

 En cliquant sur le lien « **Corrigé** », vous pouvez consulter la correction détaillée de chaque exercice.

ES 1 (Asymptote oblique) (Corrigé)

Soit f la fonction définie sur $] -\infty ; 3[\cup] 3 ; +\infty [$ par $f(x) = \frac{2x^2 - 5x - 2}{x - 3}$.

1. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?
2. Montrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3}$.
3. Tracer la courbe de f et la droite d'équation $y = ax + b$. Que constate-t-on ?
4. On note g la fonction définie sur $] -\infty ; 3[\cup] 3 ; +\infty [$ par $g(x) = f(x) - (ax + b)$.
 - a) Étudier les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
 - b) Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?

ES 2 (Polynôme de degré 3 et seuils) (Corrigé)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x + 1$.

1. À l'aide de la calculatrice, tracer la courbe représentative de f et conjecturer la limite de f en $+\infty$.
2. Démontrer cette conjecture.
3. Quelle est la valeur de la variable X en fin d'exécution de l'algorithme ci-contre ? Interpréter cette valeur.
4. Écrire une fonction `seuil` prenant en argument un réel A et qui renvoie une valeur de x telle que $f(x) > A$.
5. Est-on certain que le nombre d'itérations de la boucle `while` sera fini quelle que soit la valeur de A choisie en argument ? Expliquer.
6. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
7. Modifier la fonction `seuil` précédente afin d'obtenir une valeur de x telle que $f(x) < -10^6$.

```
X ← 0
Tant que  $X^3 - X + 1 \leq 10\,000$  :
    X ← X + 1
```

ES 3 (Scripts en Python) (Corrigé)

1. Après l'exécution du programme ci-contre, la variable **F** contient un nombre :

- | | |
|----------------|----------------|
| 1. très grand | 3. proche de 1 |
| 2. proche de 0 | 4. proche de 2 |

```

1 | x=0
2 | for i in range(1,101):
3 |     F=(3+2*x)/(x**2+1)
4 |     x=x+100

```

2. Après l'exécution du programme ci-contre, la variable **F** contient un nombre :

- | | |
|--|-------------------|
| 1. négatif et très grand en valeur absolue | 3. proche de -1 |
| 2. proche de 0 | 4. proche de $-e$ |

```

1 | from math import exp
2 | x=0
3 | for i in range(1,21):
4 |     F=x*exp(x)
5 |     x=x-10

```

ES 4 (Vrai ou faux ?) (Corrigé)

Pour chaque proposition, dire si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, justifier la réponse ; si elle est fausse, donner un contre-exemple sous forme de graphique.

► **Proposition A** : Si une fonction f est telle que, pour tout réel $x > 0$, $f(x) \leq \frac{1}{x}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

► **Proposition B** : Si une fonction f est telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > x^2$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

► **Proposition C** : Si une fonction f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

► **Proposition D** : Si une fonction f est strictement décroissante sur $] -\infty; -1]$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

► **Proposition E** : Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors f est une fonction positive.

► **Proposition F** : Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, alors il existe un réel A tel que, pour tout $x > A$, $f(x) > 0$.

► **Proposition G** : Si une fonction f est telle que, pour tout réel $x < 0$, $\frac{1}{x} \leq f(x) \leq -\frac{1}{x}$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

► **Proposition H** : Si une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est bornée (c-à-d si elle admet un maximum et un minimum), alors elle admet une limite réelle en $+\infty$.

ES 5 (Réglage d'une perfusion) (Corrigé)

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a} (1 - e^{-\frac{a}{80}t})$$

où

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre,
- t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure,
- d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure,
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.

En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C .

Partie A – Étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.

Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0; +\infty[$ par $C(t) = 12(1 - e^{-\frac{7}{80}t})$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction C sur $[0; +\infty[$.
2. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace?

Partie B – Étude de fonctions

1. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{105}{x} (1 - e^{-\frac{3}{40}x})$. On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Démontrer que, pour tout réel x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{105g(x)}{x^2}$, où g est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{3x}{40} e^{-\frac{3}{40}x} + e^{-\frac{3}{40}x} - 1.$$

2. On donne ci-contre le tableau de variation de la fonction g .

En déduire le sens de variation de la fonction f .

On ne demande pas les limites de la fonction f .

x	0	$+\infty$
g	0	-1

3. On admet que l'équation $f(x) = 5,9$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1; 80]$.

En déduire que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.