

Table des matières

3 Limites de suites	1
Exercices supplémentaires du chapitre	1
ES 1 (CE secours J1 juin 2024 – Services de volley) (Corrigé)	2
ES 2 (Extrait de Métropole J2 juin 2024 – Taux de chlore) (Corrigé)	3
ES 3 (Asie J2 juin 2024 – Jeu vidéo) (Corrigé)	4
ES 4 (CE J2 juin 2024 – Suite et nombre d'or) (Corrigé)	5
ES 5 (Polynésie septembre 2023) (Corrigé)	6
ES 6 (Limite finie et seuil) (Corrigé)	7
ES 7 (Vrai ou faux?) (Corrigé)	7
ES 8 (Suite auxiliaire arithmétique) (Corrigé)	8
ES 9 (Limite de la somme des termes) (Corrigé)	8
ES 10 (Phase de décroissance d'une épidémie) (Corrigé)	8
ES 11 (À partir d'un programme de calculatrice) (Corrigé)	9
ES 12 (Comparaison de deux suites divergentes) (Corrigé)	9
ES 13 (Population d'abeilles) (Corrigé)	9
ES 14 (Évolution d'une population animale) (Corrigé)	10
ES 15 (Convergence vers e) (Corrigé)	11
ES 16 (Épreuve 2021) (Corrigé)	12
ES 17 (Location de vélos - épreuve 2022) (Corrigé)	13
ES 18 (Développement d'une bactérie - épreuve 2022) (Corrigé)	14
ES 19 (Modélisation d'un verger - Asie J1 23/03/23) (Corrigé)	15
ES 20 (La méthode de Héron - Amérique du Nord J1 27/03/23) (Corrigé)	16
ES 21 (Refroidissement d'un gâteau – ADN 18/05/22) (Corrigé)	17
ES 22 (Polynésie 04/05/22) (Corrigé)	18
ES 23 (Télétravail – Centres étrangers 09/06/21) (Corrigé)	19
ES 24 (Suite homographique, suite auxiliaire géométrique – Métropole 13/09/21) (Corrigé)	20
ES 25 (Système de suites récurrentes – Métropole J2 13/09/21) (Corrigé)	21
ES 26 (Suite homographique, suite auxiliaire arithmétique – NC 29/08/23) (Corrigé)	22
ES 27 (Suite auxiliaire géométrique – NC 28/08/23) (Corrigé)	23
ES 28 (Suite auxiliaire géométrique – ADS 27/09/23) (Corrigé)	24
ES 29 (Métropole 12/09/23) (Corrigé)	25
ES 30 (ADS 26/09/23) (Corrigé)	26
ES 31 (Radioactivité du polonium - Asie J2 24/03/23) (Corrigé)	27
ES 32 (Évolution d'une population – ADS 27/09/22) (Corrigé)	28

Chapitre 3

Limites de suites

Exercices supplémentaires du chapitre

 *En cliquant sur le lien « **Corrigé** », vous pouvez consulter la correction détaillée de chaque exercice.*

ES 1 (CE secours J1 juin 2024 – Services de volley) (Corrigé)

Au cours d'une séance, un joueur de volley-ball s'entraîne à faire des services. La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à 0,85.

On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- si le joueur réussit un service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant est égale à 0,6 ;
- si le joueur ne réussit pas un service, alors la probabilité qu'il ne réussisse pas le suivant est égale à 0,6.

Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le joueur réussit le n -ième service » et $\overline{R_n}$ l'évènement contraire.

Partie A

On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité de l'évènement R_2 est égale à 0,57.
3. Sachant que le joueur a réussi le deuxième service, calculer la probabilité qu'il ait raté le premier.
4. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de services réussis au cours des deux premiers services.
 - a) Déterminer la loi de probabilité de Z (on pourra utiliser l'arbre pondéré de la question 1).
 - b) Calculer l'espérance mathématique $E(Z)$ de la variable aléatoire Z .

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On s'intéresse maintenant au cas général.

Pour tout entier naturel n non nul, on note x_n la probabilité de l'évènement R_n .

1.
 - a) Donner les probabilités conditionnelles $P_{R_n}(R_{n+1})$ et $P_{\overline{R_n}}(\overline{R_{n+1}})$.
 - b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , on a : $x_{n+1} = 0,2x_n + 0,4$.
2. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = x_n - 0,5$.
 - a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.
 - b) Déterminer l'expression de x_n en fonction de n . En déduire la limite de la suite (x_n) .
 - c) Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

ES 2 (Extrait de Métropole J2 juin 2024 – Taux de chlore) (Corrigé)

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$.

Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore. Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et $3 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.

Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à $0,01 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de $0,70 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

Partie A – étude d'un modèle discret

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de $0,3 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.
2. Pour tout entier naturel n , on note v_n le taux de chlore, en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0,7$. On admet que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 0,92 v_n + 0,3$.
2. a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.
2. b) Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ?

Justifier la réponse.

4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-après écrit en langage Python pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)` ?

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

```
1 def alerte_chlore(s):  
2     n=0  
3     v=0.7  
4     while .....:  
5         n=.....  
6         v=.....  
7     return n
```

ES 3 (Asie J2 juin 2024 – Jeu vidéo) (Corrigé)

Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties.

Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas.

Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de 0,2.

De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.

On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

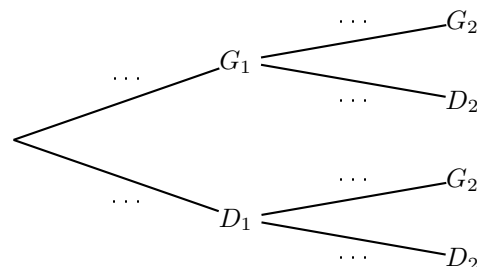
Pour tout entier naturel n non nul, on définit les événements suivants :

- G_n : « Léa gagne la n -ième partie de la journée » ;
- D_n : « Léa perd la n -ième partie de la journée ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'évènement G_n . On a donc $g_1 = 0,5$.

1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $P_{G_1}(D_2)$?

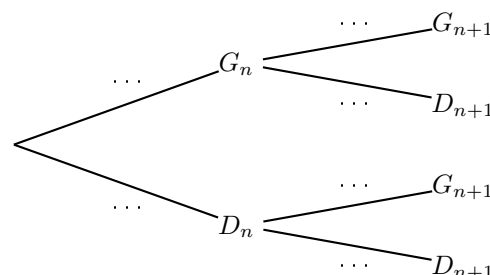
2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :



3. Calculer g_2 .

4. Soit n un entier naturel non nul.

4. a) Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les n -ième et $(n+1)$ -ième parties de la journée.



4. b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_{n+1} = 0,5g_n + 0,2$.

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0,4$.

5. a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera son premier terme et sa raison.

5. b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4$.

6. Étudier les variations de la suite (g_n) .

7. Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n) . Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

8. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que $g_n - 0,4 \leq 0,001$.

9. Recopier et compléter les lignes 4 à 7 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0,4 + e$, où e est un nombre réel strictement positif.

```

1 def seuil(e):
2     g=0.5
3     n=1
4     while .....:
5         g=.....
6         n=.....
7     return ....

```

ES 4 (CE J2 juin 2024 – Suite et nombre d’or) (Corrigé)**Partie A**

On considère la fonction f définie sur l’intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x+1}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l’intervalle $[0; +\infty[$.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l’intervalle $[0; +\infty[$.
2. Démontrer que pour tout réel $x \in [0; +\infty[$, $f(x) - x = \frac{-x^2 + x + 1}{\sqrt{x+1} + x}$.
3. En déduire que sur l’intervalle $[0; +\infty[$, l’équation $f(x) = x$ admet pour unique solution $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction de la **partie A**.

On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n .

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge.
3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
4. On considère le script Python suivant :

```

1 | from math import *
2 | def seuil(n):
3 |     u=5
4 |     i=0
5 |     l=(1+sqrt(5))/2
6 |     while abs(u-l)>=10**(-n):
7 |         u=sqrt(u+1)
8 |         i=i+1
9 |     return i

```

On rappelle que la commande `abs(x)` renvoie la valeur absolue de x .

- a) Donner la valeur renvoyée par `seuil(2)`.
- b) La valeur renvoyée par `seuil(4)` est 9. Interpréter cette valeur dans le contexte de l’exercice.

ES 5 (Polynésie septembre 2023) (Corrigé)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire, que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{4}{3}; 2\right]$.

3. Démontrer que pour tout x réel, $x \leq f(x)$. Pour cela, on pourra démontrer que pour tout réel x , $f(x) - x = \frac{3}{4}(x - 2)^2$.

On considère la suite (u_n) définie par un réel u_0 et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$.

4. **Étude du cas : $\frac{4}{3} \leq u_0 \leq 2$.**

4. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $\frac{4}{3} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

4. b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. c) Prouver que la limite de la suite est égale à 2.

5. **Étude du cas particulier : $u_0 = 3$.**

On admet que dans ce cas la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

Recopier et compléter la fonction `seuil` suivante écrite

en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n

telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

```

1 def seuil():
2     u=3
3     n=0
4     while.....:
5         u=.....
6         n=.....
7     return n

```

6. **Étude du cas : $u_0 > 2$.**

6. a) À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que (u_n) n'est pas convergente.

6. b) La suite (u_n) admet-elle alors une limite ?

ES 6 (Limite finie et seuil) (Corrigé)

On considère l'algorithme suivant.

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de la variable n en fin d'exécution de cet algorithme.

On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 7}{n^2 + 3} = 1$ et on considère la fonction Python `seuil` ci-contre, d'argument un entier naturel p .

2. Quelle instruction faut-il saisir dans la console pour retrouver la valeur de la question 1 ?

3. Quelle que soit la valeur de l'entier p choisi en argument, existera-t-il une valeur de n qui permettra de sortir de la boucle `while` ? Expliquer.

4. Rappeler $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^3}$ puis écrire une fonction `seuil2`, d'argument un entier naturel p , qui renvoie le premier entier naturel n tel que $\frac{1}{n^3} < 10^{-p}$. Que renvoient les instructions `seuil2(3)` et `seuil2(5)` ?

```

n ← 0
Tant que  $\left| \frac{n^2 - 7}{n^2 + 3} - 1 \right| \geq 0,1$  :
    n ← n + 1

```

```

1 | def seuil1(p):
2 |     n=0
3 |     while abs((n**2-7)/(n**2+3)-1)>=10**(-p):
4 |         n=n+1
5 |     return n

```

ES 7 (Vrai ou faux?) (Corrigé)

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- On considère une suite (u_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Proposition A : La suite (u_n) est monotone.

Proposition B : La suite (u_n) admet un majorant.

Proposition C : La suite (u_n) est minorée.

Proposition D : La suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

- **Proposition E :** Une suite qui n'est pas majorée diverge vers $+\infty$.

- **Proposition F :** Si une suite converge vers 0, alors ses termes sont positifs à partir d'un certain rang.

- **Proposition G :** Si une suite est monotone et bornée, alors elle converge.

ES 8 (Suite auxiliaire arithmétique) (Corrigé)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{3+2u_n}$.

1. À l'aide de la calculatrice, quelle conjecture peut-on faire sur la limite et le sens de variation de la suite (u_n) ?
2.
 - a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.
 - b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
 - c) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{3}{u_n}$.
 - a) Prouver que (v_n) est une suite arithmétique.
 - b) En déduire une expression de u_n en fonction de n .
 - c) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

ES 9 (Limite de la somme des termes) (Corrigé)

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4n + 2$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2n$. En déduire la limite de la suite (u_n) .
3. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 2n$.
 - a) Préciser la nature de la suite (v_n) .
 - b) En déduire une expression de u_n en fonction de n .
4. Pour tout entier naturel n , on note $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.
Exprimer S_n en fonction de n puis étudier la limite de la suite (S_n) .

ES 10 (Phase de décroissance d'une épidémie) (Corrigé)

Une épidémie est en phase de décroissance et le nombre de cas déclarés diminue de 20 % chaque jour. Au pic de l'épidémie, il y avait 2 000 personnes atteintes par celle-ci.

On note $p_0 = 2000$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le nombre de nouveaux cas déclarés le n -ième jour après le pic de l'épidémie.

1. Pour tout entier naturel n , exprimer p_n en fonction de n .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note C_n le nombre total de cas déclarés entre le pic et le n -ième jour après le pic de l'épidémie.
Exprimer C_n en fonction de n et étudier la limite de la suite (C_n) .
3. Au bout de combien de jours le nombre de cas déclarés depuis le pic de l'épidémie dépassera-t-il 9 500 ?

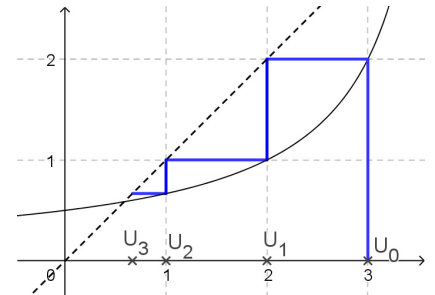
ES 11 (À partir d'un programme de calculatrice) (Corrigé)

On considère une suite définie par récurrence et de premier terme u_0 .

Alban a écrit le programme ci-contre sur sa calculatrice pour calculer le terme d'indice N de cette suite.

```
PROGRAM:REC
:Prompt N
:3→U
:For(I,1,N)
:2/(4-U)→U
:End
:Disp U
```

1. Quelle est la valeur de u_0 ? Quelle relation de récurrence vérifie la suite (u_n) ?
2. Modifier le programme d'Alban pour qu'il calcule et affiche les termes u_0 à u_N de la suite (u_n) .
3. À l'aide d'un logiciel, Alban obtient la représentation graphique suivante des quatre premiers termes de la suite (u_n) .
 - a) Quelle conjecture peut-il faire quant à la monotonie de (u_n) ? Semble-t-elle minorée ?
 - b) Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3$.
 - c) Alban a conclu que la suite (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$. A-t-il raison ?

**ES 12 (Comparaison de deux suites divergentes) (Corrigé)**

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$;
- la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 2^n$.

Partie A – Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur. Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C2 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?
2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats ci-contre.
Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
12	10	3 080	1 024
13	11	6 153	2 048
14	12	12 298	4 096
15	13	24 587	8 192

Partie B – Étude des suites (u_n) et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.
4. On admet que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$. Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

ES 13 (Population d'abeilles) (Corrigé)

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles. Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente.

Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers.

On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.

Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n -ième année. Ainsi, on a $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,8u_n + c$.

L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000.

On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif.

On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 5c$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n et de c .
3. Déterminer la valeur de c pour que l'apiculteur atteigne son objectif.

ES 14 (Évolution d'une population animale) (Corrigé)

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.

Cette population est estimée à 12 000 individus en 2019. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A – un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.

L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2019 + n$. On a donc $v_0 = 12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n .
2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B – un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -\frac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x$.
 - a) Justifier que g est croissante sur $[0; 60]$.
 - b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.
2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.
 - a) Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1 . Interpréter.
 - b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 55$.
 - c) En déduire la convergence de la suite (u_n) .
 - d) Déterminer la limite de (u_n) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.
3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle. Il utilise l'algorithme ci-contre. Compléter cet algorithme de sorte qu'à la fin de son exécution, la variable n contienne le plus petit entier r tel que $u_r \geq 50$.

1	$n \leftarrow 0$
2	$u \leftarrow 12$
3	Tant Que
4	$u \leftarrow$
5	$n \leftarrow$
6	Fin Tant Que

ES 15 (Convergence vers e) (Corrigé)**Partie A – Factorielle**

Soit n un entier naturel. On appelle « *factorielle n* », que l'on note $n!$, le nombre égal au produit des n premiers entiers naturels non nuls, c-à-d : $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.

Par convention, on pose : $0! = 1$.

1. Calculer $1!$, $2!$ et $3!$.
2. Compléter la fonction Python `factorielle` ci-contre qui prend en argument la valeur d'un entier n et renvoie la valeur de $n!$.

```

1 def factorielle(n):
2     f=1
3     for i in range(...,...):
4         f=.....
5     return f

```

Partie B – Étude d'une suite

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

1. Prouver que la suite (u_n) est croissante.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier k non nul, $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1 + \frac{1 - 0,5^n}{1 - 0,5}$.
4. Justifier alors que la suite (u_n) converge.

Partie C – Approximation de la limite

Dans cette partie, on cherche une approximation de la limite de la suite (u_n) .

Cette limite est le nombre e dont les origines remontent à 1614 lorsqu'un mathématicien écossais du nom de John Napier (parfois francisé en Jean Neper) introduisit la notion de logarithme népérien pour faciliter les calculs avec de grands nombres.

C'est toutefois Leonhard Euler (mathématicien suisse, 1707-1783) qui lui donna le nom de e , première lettre du mot « exponentielle ».



1. On considère l'algorithme ci-contre.
Quelles sont les valeurs des variables n et u en fin d'exécution de cet algorithme ?

```

n ← 0
u ← 1
Tant que |u - e| ≥ 0,01 :
    n ← n + 1
    u ← u + 1/n!

```

2. À la suite du script de la fonction `factorielle` de la **partie A**, on écrit celui de la fonction `approx_e` ci-contre, d'argument un entier naturel p .
On souhaite que cette fonction renvoie le rang du premier terme de la suite (u_n) dont la distance à e est inférieure à 10^{-p} , ainsi que la valeur de ce terme.
À l'aide de la fonction `factorielle`, compléter ce script.

```

1 from math import exp
2 def approx_e(p):
3     u=1
4     n=0
5     while .....:
6         n=.....
7         u=.....
8     return n,u

```

ES 16 (Épreuve 2021) (Corrigé)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 &= v_0 = 1 \\ u_{n+1} &= u_n + v_n \\ v_{n+1} &= 2u_n + v_n \end{cases}$$

Dans toute la suite de l'exercice, on **admet** que les suites (u_n) et (v_n) **sont strictement positives**.

1.
 - a) Calculer u_1 et v_1 .
 - b) Démontrer que la suite (v_n) est strictement croissante, puis en déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n \geq 1$.
 - c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq n + 1$.
 - d) En déduire la limite de la suite (u_n) .

2. On pose, pour tout entier naturel n : $r_n = \frac{v_n}{u_n}$. On admet que : $r_n^2 = 2 + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.

- a) Démontrer que pour tout entier naturel n : $-\frac{1}{u_n^2} \leq \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2} \leq \frac{1}{u_n^2}$.
- b) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{u_n^2}$.
- c) Déterminer la limite de la suite (r_n^2) et en déduire que si la suite (r_n) converge, alors sa limite est $\sqrt{2}$.

Dans la suite, on admet que la suite (r_n) converge vers $\sqrt{2}$.

- d) Démontrer que pour tout entier naturel n , $r_{n+1} = \frac{2 + r_n}{1 + r_n}$.

- e) On considère le programme ci-contre écrit en langage Python.

La valeur de n renvoyée par ce programme est 5.

À quoi correspond-elle ?

```

1 | from math import *
2 | def seuil():
3 |     n=0
4 |     r=1
5 |     while abs(r-sqrt(2))>=10**(-4):
6 |         r=(2+r)/(1+r)
7 |         n=n+1
8 |     return n

```

ES 17 (Location de vélos - épreuve 2022) (Corrigé)

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distinctes, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un ou l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à 0,84 ;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à 0,76.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

On considère un vélo de la société pris au hasard.

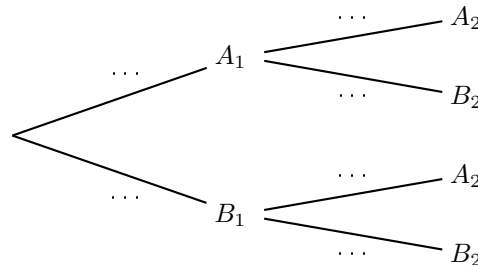
Pour tout entier naturel non nul n , on définit les événements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n -ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n -ième matin ».

Pour tout entier naturel non nul n , on note a_n la probabilité de l'événement A_n et b_n la probabilité de l'événement B_n .

Ainsi $a_1 = 0,5$ et $b_1 = 0,5$.

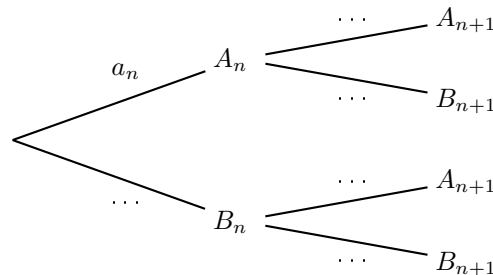
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



2. a) Calculer a_2 .

b) Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millièmes.

3. a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n -ième et $n+1$ -ième matins.



b) Justifier que pour tout entier naturel non nul n , $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$.

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n , $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$.

5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geq 0,599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

ES 18 (Développement d'une bactérie - épreuve 2022) (Corrigé)

On s'intéresse au développement d'une bactérie.

Dans cet exercice, on modélise son développement avec les hypothèses suivantes : cette bactérie a une probabilité 0,3 de mourir sans descendance et une probabilité 0,7 de se diviser en deux bactéries filles.

Dans le cadre de cette expérience, on admet que les lois de reproduction des bactéries sont les mêmes pour toutes les générations de bactéries qu'elles soient mère ou fille.

Pour tout entier naturel n , on appelle p_n la probabilité d'obtenir au plus n descendances pour une bactérie.

On admet que, d'après ce modèle, la suite (p_n) est définie de la façon suivante :

$p_0 = 0,3$ et, pour tout entier naturel n , $p_{n+1} = 0,3 + 0,7p_n^2$.

1. La feuille de calcul ci-dessous donne des valeurs approchées de la suite (p_n) .

- a) Déterminer les valeurs exactes de p_1 et p_2 (masquées dans la feuille de calcul) et interpréter ces valeurs dans le contexte de l'énoncé.
- b) Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, d'obtenir au moins 11 générations de bactéries à partir d'une bactérie de ce type ?
- c) Formuler des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n) .

2. a) Démontrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n , $0 \leq p_n \leq p_{n+1} \leq 0,5$.

b) Justifier que la suite (p_n) est convergente.

3. On appelle L la limite de la suite (p_n) .

- a) Justifier que L est solution de l'équation $0,7x^2 - x + 0,3 = 0$.
- b) Déterminer alors la limite de la suite (p_n) .

	A	B
1	n	p_n
2	0	0,3
3	1	
4	2	
5	3	0,407 695 62
6	4	0,416 351
7	5	0,421 343 71
8	6	0,424 271 37
9	7	0,426 004 33
10	8	0,427 035 78
11	9	0,427 651 69
12	10	0,428 020 18
13	11	0,428 240 89
14	12	0,428 373 18
15	13	0,428 452 51
16	14	0,428 500 09
17	15	0,428 528 63
18	16	0,428 545 75
19	17	0,428 556 02

4. La fonction suivante, écrite en langage Python, a pour objectif de renvoyer les n premiers termes de la suite (p_n) .

Recopier sur votre copie cette fonction en complétant les pointillés de façon à ce que la fonction `suite(n)` retourne, sous forme de liste, les n premiers termes de la suite.

```

1 def suite(n):
2     p=.....
3     s=[p]
4     for i in range(...):
5         p=.....
6         .....
7     return s

```

ES 19 (Modélisation d'un verger - Asie J1 23/03/23) (Corrigé)**Partie A**

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 400$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9 u_n + 60$.

1. a) Calculer u_1 et u_2 .
b) Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a l'inégalité : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 600$.
3. a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Justifier.
4. On donne ci-contre une fonction écrite en langage Python.
Quelle valeur obtient-on en tapant `mystere(500)` dans la console ?

```

1 | def mystere(seuil):
2 |     n=0
3 |     u=400
4 |     while u<=seuil :
5 |         n=n+1
6 |         u=0.9*u+60
7 |     return n

```

Partie B

Un arboriculteur possède un verger dans lequel il a la place de cultiver au maximum 500 arbres.

Chaque année il vend 10 % des arbres de son verger et puis il replante 60 nouveaux arbres.

Le verger compte 400 arbres en 2023.

L'arboriculteur pense qu'il pourra continuer à vendre et à planter les arbres au même rythme pendant les années à venir.

Va-t-il être confronté à un problème de place dans son verger ? Expliquer votre réponse.

ES 20 (La méthode de Héron - Amérique du Nord J1 27/03/23) (Corrigé)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{11}{u_n} \right)$.

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

Partie A – Étude de la suite (u_n)

1. Donner u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{11}{x} \right)$.
Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[\sqrt{11}; +\infty[$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq u_{n+1} \geq \sqrt{11}$.
4. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle. On note a cette limite.
5. Après avoir déterminé et résolu une équation dont a est solution, préciser la valeur exacte de a .

Partie B – Application géométrique

Pour tout entier naturel n , on considère un rectangle R_n d'aire 11 dont la largeur est notée ℓ_n et longueur L_n .

La suite (L_n) est définie par $L_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n , $L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2}$.

1. a) Expliquer pourquoi $\ell_0 = 2,2$.
b) Établir que pour tout entier naturel n , $\ell_n = \frac{11}{L_n}$.
2. Vérifier que la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de la **partie A**.
3. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $\ell_n \leq \sqrt{11} \leq L_n$.
4. On admet que les suites (L_n) et (ℓ_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$. Interpréter géométriquement ce résultat dans le contexte de la **partie B**.
5. Voici un script, écrit en langage Python, relatif aux suites étudiées dans cette partie.
On rappelle que la fonction Python `round(x, k)` renvoie une version arrondie du nombre x avec k décimales.

a) Si l'utilisateur tape <code>heron(3)</code> dans une console d'exécution Python, qu'obtient-il comme valeurs de sortie ? b) Donner une interprétation de ces deux valeurs.	<pre> 1 def heron(n): 2 Long=5 3 larg=2.2 4 for i in range(n): 5 Long=(Long+larg)/2 6 larg=11/Long 7 return round(larg,6),round(Long,6) </pre>
--	--

ES 21 (Refroidissement d'un gâteau – ADN 18/05/22) (Corrigé)

Dans cet exercice, on considère la suite (T_n) définie par :

$$T_0 = 180 \text{ et, pour tout entier naturel } n, T_{n+1} = 0,955 T_n + 0,9$$

1. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $T_n \geq 20$.
 b) Vérifier que pour tout entier naturel n , $T_{n+1} - T_n = -0,045(T_n - 20)$.
 En déduire le sens de variation de la suite (T_n) .
 c) Conclure de ce qui précède que la suite (T_n) est convergente. Justifier.
2. Pour tout entier naturel n , on pose : $u_n = T_n - 20$.
 a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 b) En déduire que pour tout entier naturel n , $T_n = 20 + 160 \times 0,955^n$.
 c) Calculer la limite de la suite (T_n) .

3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four.

On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180° C et celle de l'air ambiant de 20° C .
 La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente (T_n) .
 Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.

- a) Expliquer pourquoi la limite de la suite (T_n) déterminée à la question 2. c) était prévisible dans le contexte de l'exercice.

- b) On considère la fonction Python ci-contre.

Donner le résultat obtenu en exécutant la commande `temp(120)`.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

```

1 def temp(x) :
2     T = 180
3     n = 0
4     while T > x:
5         T = 0.955 * T + 0.9
6         n = n + 1
7     return n
  
```

ES 22 (Polynésie 04/05/22) (Corrigé)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$.

1. a) Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 . On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

```
1 def liste(k):  
2     L=[]  
3     u=...  
4     for i in range(0,k+1):  
5         L.append(u)  
6         u=...  
7     return(L)
```

b) Recopier le script python ci-contre et compléter les lignes 3 et 6 pour que `liste(k)` prenne en paramètre un entier naturel `k` et renvoie la liste des premières valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k .

2. On admet que, pour tout entier naturel n , u_n est strictement positif.

Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

3. En déduire que la suite (u_n) converge.

4. Déterminer la valeur de sa limite.

5. a) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .

b) Démontrer par récurrence la conjecture précédente.

ES 23 (Télétravail – Centres étrangers 09/06/21) (Corrigé)

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable. Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n) .

Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n -ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A – Étude du nombre de télétravailleurs

1. Calculer a_1 .
2. Justifier que pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,85 a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3\,000$.
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85.
 - b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $a_n = -2\,800 \times 0,85^n + 3\,000$.
 - c) Déterminer la limite de la suite (a_n) . En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
 - d) Étudier le sens de variation de la suite (a_n) .

4. On souhaite déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise. Pour cela, on utilise la fonction Python `seuil`, retranscrite partiellement ci-contre.

- a) Compléter le script de la fonction `seuil` afin qu'elle réponde au problème.
On proposera deux solutions différentes pour compléter la ligne 6.
- b) Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction `seuil`.

```

1 def seuil() :
2     a=.....
3     n=0
4     while .....:
5         n=.....
6         a=.....
7     return .....
```

Partie B – Mesure de la satisfaction

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2},$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x + 4}{x + 2}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
2. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.
b) Justifier que la suite (u_n) est convergente.
c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.
3. On admet que pour tout entier naturel n , $0 \leq 4 - u_n \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Retrouver la limite de la suite (u_n) .

ES 24 (Suite homographique, suite auxiliaire géométrique – Métropole 13/09/21) (Corrigé)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left] -\frac{1}{3}; +\infty \right[$ par : $f(x) = \frac{4x}{1+3x}$.

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1 .

2. a) Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left] -\frac{1}{3}; +\infty \right[$.

b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

d) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ .

3. a) Recopier et compléter la fonction Python ci-contre qui, pour tout réel positif E , détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$.

b) Donner la valeur renvoyée par la commande `seuil(10*(-4))`.

```

1 def seuil(E):
2     u=0.5
3     n=0
4     while .....:
5         u=.....
6         n=.....
7     return .....
```

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{v_n}{v_n + 1}$.

c) Montrer alors que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{1}{1 + 0,25^n}$.

Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n) .

ES 25 (Système de suites récurrentes – Métropole J2 13/09/21) (Corrigé)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = 16$; $v_0 = 5$ et pour tout entier naturel n ,

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}.$$

1. Calculer u_1 et v_1 .
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.

a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,1.

En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de w_n en fonction de n .

b) Préciser le signe de la suite (w_n) et la limite de cette suite.

3. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = -0,4 w_n$.

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante.

On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors, pour tout entier naturel n , $v_n \geq v_0 = 5$.

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 5$.

En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle ℓ la limite de (u_n) .

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente.

On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n) .

4. a) Démontrer que $\ell = \ell'$.

b) On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.

Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n , on a : $c_{n+1} = c_n$.

En déduire que, pour tout entier naturel n , $c_n = 100$.

c) Déterminer la valeur commune des limites ℓ et ℓ' .

5. On souhaite disposer des listes des premiers termes des suites (u_n) et (v_n) .

Pour cela, on dispose de la fonction Python `liste` ci-contre, d'argument k un entier naturel.

Compléter les pointillés du script de sorte que la commande `liste(k)` retourne

la liste des termes de u_0 à u_k et la liste des termes de v_0 à v_k .

```

1  def liste(k):
2      u=16
3      v=5
4      Lu=[u]
5      Lv=[v]
6      for i in range(k):
7          t=u
8          u=.....
9          v=.....
10         .....
11         .....
12     return Lu,Lv

```

ES 26 (Suite homographique, suite auxiliaire arithmétique – NC 29/08/23) (Corrigé)

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}$.

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n .

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
2. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

<pre> 1 def terme(n): 2 3 u=... 4 5 for i in range(n): 6 7 u=... 8 9 return u </pre>	On rappelle qu'en langage Python, « <code>i in range(n)</code> » signifie que i varie de 0 à $n - 1$.
---	--

Compléter le script ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n , l'instruction `terme(n)` renvoie la valeur de u_n .

3. Soit la fonction f définie sur $] -3; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{-x - 4}{x + 3}$. Ainsi, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $] -3; +\infty[$.

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $-2 < u_{n+1} \leq u_n$.

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

6. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$.

- a) Donner v_0 .
- b) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.
- c) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$: $u_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2$.
- d) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

ES 27 (Suite auxiliaire géométrique – NC 28/08/23) (Corrigé)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , par : $u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$.

1.
 - a) Démontrer que $u_1 = 12$.
 - b) Déterminer u_2 en détaillant le calcul.
 - c) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n) .
2.
 - a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq n + 1$.
 - b) En déduire la limite de la suite (u_n) .
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - n - 1$.
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Donner sa raison et son premier terme v_0 .
 - b) En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
 - c) En déduire que pour tout entier naturel n : $u_n = 2 \times 5^n + n + 1$.
 - d) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

4. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python

et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^7$.

- a) Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.
- b) Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

```
1 def suite():
2     u=3
3     n=0
4     while .....:
5         u=.....
6         n=n+1
7     return n
```

ES 28 (Suite auxiliaire géométrique – ADS 27/09/23) (Corrigé)

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6$.

1. Calculer u_1 et u_2 .

2. Soit n un entier naturel.

Recopier et compléter la fonction `suite_u` d'argument `n` ci-contre, écrite en langage Python, afin qu'elle retourne la valeur de u_n .

```

1  def suite_u(n) :
2      u=.....
3      for i in range(n):
4          u=.....
5      return u

```

3. a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2n$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout entier n vérifiant $n \geq n_0$, $u_n > 10^p$?

4. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

5. On considère la suite (v_n) , définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - 2n + 1$.

a) En dessous de la fonction `suite_u` précédente, on a écrit la fonction `suite_v` ci-dessous :

```

1  def suite_v(n):
2      L=[]
3      for i in range(n+1):
4          L.append(suite_u(i)-2*i+1)
5      return L

```

La commande « `L.append` » permet de rajouter, en dernière position, un élément dans la liste `L`.

Lorsqu'on saisit `suite_v(5)` dans la console, on obtient l'affichage suivant :

```
>>> suite_v(5)
```

```
[1, 5, 25, 125, 625, 3125]
```

Conjecturer, pour tout entier naturel n , l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n puis la nature de la suite (v_n) .

Démontrer cette conjecture.

b) En déduire, pour tout entier naturel n , la forme explicite de u_n en fonction de n .

ES 29 (Métropole 12/09/23) (Corrigé)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = \frac{1}{e}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n$ pour tout entier $n \geq 1$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_2 et u_3 . On détaillera les calculs.

2. On considère une fonction écrite en langage Python qui, pour un entier naturel n non nul donné, affiche le terme u_n .

Compléter les lignes 2 et 4 de ce programme.

```
1  def suite(n):  
2      .....  
3      for i in range(1,n):  
4          u=.....  
5      return u
```

3. On admet que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.

a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $1 + \frac{1}{n} \leq e$.

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

c) La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier votre réponse.

4. a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul, on a : $u_n = \frac{n}{e^n}$.

b) En déduire, si elle existe, la limite de la suite (u_n) .

ES 30 (ADS 26/09/23) (Corrigé)**Partie A**

Le but de la partie **A** est d'étudier le comportement de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,3$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$.

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x(1 - x)$.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

2. On admet que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

Calculer u_1 puis effectuer un raisonnement par récurrence pour démontrer que pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. Justifier que la limite de la suite (u_n) est égale à $\frac{1}{2}$.

Partie B

Le but de cette partie est d'étudier un modèle d'évolution d'une population.

En 2022, cette population compte 3 000 individus.

On note P_n l'effectif en milliers de la population l'année $2022 + n$. Ainsi $P_0 = 3$.

Selon un modèle inspiré du modèle de Verhulst, mathématicien belge du XIX^e siècle, on considère que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P_{n+1} - P_n = P_n(1 - b \times P_n), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel b est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

1. Dans cette question $b = 0$.

a) Justifier que la suite (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) Déterminer la limite de P_n .

2. Dans cette question $b = 0,2$.

a) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = 0,1 \times P_n$.

Calculer v_0 puis montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 2v_n(1 - v_n)$.

b) Dans ce modèle, justifier que la population se stabilisera autour d'une valeur que l'on précisera.

ES 31 (Radioactivité du polonium - Asie J2 24/03/23) (Corrigé)

Marie Skłodowska-Curie (1867 – 1934) est une physicienne (mais aussi chimiste et mathématicienne), polonaise naturalisée française.

Deux Prix Nobel lui ont été décernés: un en Physique (partagé avec son mari et Henri Becquerel) en 1903 et un en Chimie en 1911 pour la découverte de deux nouveaux éléments, le polonium (nom donné en hommage à ses origines) et le radium.

On décide d'étudier le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps.

Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2 g de polonium.

On sait que 1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques.

On admet que, au bout de 24 heures, 0,5 % des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors 0,005 g de polonium.

On modélise la situation à l'aide d'une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$; on note v_0 le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l'expérience.

Pour $n \geq 1$, v_n désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

1. a) Vérifier que $v_0 = 6 \times 10^{21}$.
b) Expliquer que, pour tout nombre entier naturel n , on a : $v_{n+1} = 0,995 v_n + 1,5 \times 10^{19}$.
2. a) Démontrer, par récurrence sur n , que $0 \leq v_{n+1} \leq v_n$.
b) En déduire que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
3. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n , par : $u_n = v_n - 3 \times 10^{21}$.
a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 0,995.
b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $v_n = 3 \times 10^{21} (0,995^n + 1)$.
c) En déduire la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. On donne ci-contre la fonction `seuil`, écrite en langage Python.

- a) Qu'observe-t-on si on saisit `seuil(7*10**20)` ?
- b) Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de `seuil(5.8*10**21)`.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```

1 def seuil(a) :
2     v=6*10**21
3     n=0
4     while v>=a :
5         v=0.995*v+1.5*10**19
6         n=n+1
7     return n

```

5. On souhaite disposer de la liste des termes de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour cela, on utilise une fonction appelée `noyaux`, programmée en langage Python et retranscrite partiellement ci-après.

- a) À la lecture des questions précédentes, proposer deux solutions différentes pour compléter la ligne 5 de la fonction `noyaux`, puis compléter la ligne 6 afin qu'elle réponde au problème.
- b) Pour quelle valeur de l'entier `n` la commande `noyaux(n)` renverra-t-elle les relevés quotidiens du nombre de noyaux contenus dans l'échantillon de polonium pendant 52 semaines d'étude ?

```

1 def noyaux(n) :
2     V =6*10**21
3     L=[V]
4     for k in range(n):
5         V= .....
6         .....
7     return L

```

ES 32 (Évolution d'une population – ADS 27/09/22) (Corrigé)

La population d'une espèce en voie de disparition est surveillée de près dans une réserve naturelle.

Les conditions climatiques ainsi que le braconnage font que cette population diminue de 10 % chaque année.

Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans la réserve 100 individus à la fin de chaque année.

On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année $2020 + n$.

On admet que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.

Au début de l'année 2020, la population étudiée compte 2 000 individus, ainsi $u_0 = 2\,000$.

1. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence : $u_{n+1} = 0,9 u_n + 100$.

2. Calculer u_1 puis u_2 .

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $1\,000 < u_{n+1} \leq u_n$.

4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1\,000$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1\,000 (1 + 0,9^n)$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n) . En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.

6. On souhaite déterminer le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous d'un certain seuil S (avec $S > 1\,000$).

a) Dans le programme Python ci-contre, la variable `n` désigne le nombre d'années écoulées depuis 2020, la variable `u` désigne l'effectif de la population.

Recopier et compléter ce programme afin qu'il retourne le nombre d'années nécessaires pour que l'effectif de la population passe en dessous du seuil S .

b) Quelle est la valeur renvoyée par la saisie de `population(1020)` ?

```

1 def population(S):
2     n=0
3     u=2000
4     while .....:
5         n=.....
6         u=.....
7     return .....
```